パスカル的三角形とフィボナッチ的数列を作り出すカードゲームに関する研究

平成 29 年 12 月 23 日

1 序論

私達のクラブの先輩は，箱に白色のカードと赤色のカードがあり，複数のプレイヤが箱からカードを交互にカードを取り出し，一定のルールに従って，一人の敗者を決めるようなゲームを考えた．そして，カードゲームの確率を研究して，勝敗の確率を三角形に並べると，分母と分子が独立にパスカルの三角形に似た性質を持つことを発見して，イギリスの Mathematical Gazette([2]) という伝統ある雑誌で論文を掲載した．この性質については，図 1 を見ていただきたい．なお，このときイギリスの数学者が Pascal-like triangle と呼んだので，私達はパスカルの三角形に似た性質を持つ三角形をパスカル的三角形と呼ぶことにする．

当時分母と分子が独立にパスカルの三角形の性質を持つことは，数学の専門家からとても珍しいものと考えられたのだが，今回の研究ではそのような性質を持つゲームのルールはまだまだ拡張できることがわかった．これまでのクラブの歴史の中で，珍しい事実を発見したことを誇りに思ってきたのだが，パスカルの三角形の性質を持つゲームがどんどん発見できて，2 色のカードさえ使えば，このような性質は全く珍しくないことかもしれないと思った時期もあった．幸い，パスカルの三角形の性質を持たないゲームも多数発見され，そのようなことが起こる時の条件を発見して，離散数学系の査読付き国際学会 ([1]) で私達が発表することができた．

パスカルの三角形からフィボナッチ数列を作ることができる事実は有名であるが，私達のクラブの先輩達もカードゲームの確率から作った三角形からフィボナッチ数列に似た数列を作り，それをアメリカの Fibonacci Quarterly ([3]) で掲載した．今回私達の研究では，先輩の作った数列と私達が新しく見つけた数列が面白い関係を持つことが分かり，そのことも同じ国際学会で発表した．

カードゲームのルールを書いた定義 1.1 において，$s = 1$ としたのがクラブの先輩達の研究である．私達はまずこの s を増やすところから研究を始めた．

定義 1.1. p, n, m, s を $m \leq n$ を満たす正の整数とする．円形のテーブルの周りに p 人のプレイヤ $\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_p$ を配置し，プレイヤ Θ_1 からゲームを開始する．そして順に，同じ大きさの n 枚のカードを含む箱を渡していく．m 枚の赤いカードを除き，残りは全て白のカードである．プレイヤは箱を受け取ったら，s 回カードを無作為に取り，取ったカードは箱に戻さない．したがって，箱の中のカードの数は減少していく．ただし，箱の中を見ることはできないとする．

ここで，ラウンドという言葉を使うが，第 t ラウンドとは，ゲームが開始してから t 回目にカードが取り出されることである．このゲームでは，プレイヤ Θ_1 が最初にカードを引き始めて，第 $1, 2, 3, ..., s$ ラウンドにカードを引く．そして，プレイヤ Θ_2 が第 $s + 1$ ラウンドでカードを引き始め，第 $s + 1, s + 2, ..., 2s$ ラウンドでカードを引く．これを次のプレイヤー Θ_3 が続けていく．こうやっている間に，最初に赤のカードを引いたプレイヤが負けであり，そこでゲームは終了する．

定義 1.2. 定義 *1.1* のゲームにおいて一番最初のプレイヤ Θ_1 が負ける確率を $f(p, n, m, s)$ とする．

注意 1.1. 元々，私達のグループは，ロシアンルーレットのゲームを研究していたが，ロシアンルーレットのゲームは研究に適切ではないと考える人もいるため，私達のグループは数学的に同じゲームである定義 *1.1* のゲームを作成した．ただし，数学的にはロシアンルーレットのゲームだと言われた方がわかりやすいと人が多いかもしれない．シリンダーの中で，弾の入っていない所で引き金を引くことが白のカードを引くことに相当し，弾が入っている所で引き金を引くことが赤のカードを引くことに相当する．

また，ここで考えるゲームでは p 人のプレイヤーがいるので，それぞれが負ける確率を考えるべきだが，この論文では説明を簡単にするために，最初のプレイヤーの確率だけを扱う．

例 1.1. まずパスカルの三角形を思い出していただきたい．パスカルの三角形では，組み合せの数 ${}_nC_m$ を並べるが，$n = 1, 2, 3, ...$ としながら，上から下へ並べて，$m = 0, 1, ..., n$ と左から右に並べる．私達の研究でも同じようにする．ただし $m = 1, 2, ..., n$ と左から並べる．$m = 0$ では赤のカードが 0 となり，ゲームが成立しないからである．先輩達の研究によれば，集合 $\{f(p, n, m, s) : m \leq n, n = 1, 2, ...\}$ は，正の整数 p と $s = 1$ に対してパスカルの三角形と似たパターンを有することが示されている．例として，カードゲームを $p = 4$ 人で行ない，各自が自分の番になると $s = 1$ 回ずつカードを引く場合を考えて，先手のプレイヤーの負ける確率を考える．その確率をパスカルの三角形と似たやり方で並べる．すなわち，$\{f(4, n, m, 1), 1 \leq m \leq n, n = 1, 2, ..., 6, 7\}$ から作られるパスカル的三角形を図 *1* に示す．

見て明らかなように，図 *1* は美しい特徴を有する．例えば，図 *1* によれば，$f(4, 6, 2, 1) = \frac{6}{15}, f(4, 6, 3, 1) = \frac{10}{20}$，$f(4, 7, 3, 1) = \frac{16}{35}$，$6 + 10 = 16$，$16 + 20 = 35$ であり，分子と分母でパスカル的三角形が作られる．図 *2* の数字は，図 *1* にある分数の分子である．

$$
\begin{array}{c}
\frac{1}{1} \\
\frac{1}{2}, \frac{1}{1} \\
\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \\
\frac{1}{4}, \frac{3}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \\
\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \\
\frac{2}{6}, \mathbf{\frac{6}{15}}, \mathbf{\frac{10}{20}}, \frac{10}{15}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \\
\frac{2}{7}, \frac{8}{21}, \mathbf{\frac{16}{35}}, \frac{20}{35}, \frac{15}{21}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}
\end{array}
$$

図 1: パスカル的三角形

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1,1 \\
1,2,1 \\
1,3,3,1 \\
2,4,6,4,1 \\
2,6,10,10,5,1 \\
2,8,16,20,15,6,1
\end{array}
$$

図 2: 図 1 の分子を取り出したもの

例 1.2. パスカルの三角形の対角線上の数を足していくと，フィボナッチ数列になることは良く知られている．私達の先輩は，研究の中で発見した図 *2* の三角形の対角線上の数を足していくと，フィボナッチに似た数列になることなることを発見した．このようにして作られた数列を b_n とする．そのとき，$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1 + 1 = 2, b_4 = 1 + 2 = 3, b_5 = 2 + 3 + 1 = 6, b_6 = 2 + 4 + 3 = 9, b_7 = 2 + 6 + 6 + 1 = 15, ...$ となる．この数列のルールは以下のような簡単な式で示される．

$$
b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + \begin{cases} 1 & (n = 1 \pmod 4) \\ 0 & (n \neq 1 \pmod 4). \end{cases} \tag{1.1}
$$

この数列はフィボナッチ数列に似ているだけでなく，フィボナッチ数列によって表すことができる．

定理 1.1. 数列 b_n は，次の等式を満たす．ここで $F(n)$ はフィボナッチ数列を表す．

$$
b_{4n} = F(2n)F(2n+2) = F(2n+1)^2 - 1 \tag{1.2}
$$
$$
b_{4n+1} = F(2n+1)F(2n+2) \tag{1.3}
$$
$$
b_{4n+2} = F(2n+2)^2 \tag{1.4}
$$
$$
b_{4n+3} = F(2n+2)F(2n+3). \tag{1.5}
$$

この定理の証明については，[3] を参照されたい．なお，この結果の一般化も既にできている．ここまでがクラブの先輩達の研究成果である．この成果を発展させて，どのようなゲームにおいてパスカル的三角形が現れ，どのようなゲームならそれが成立しないかを調べ，フィボナッチ数列に似た数列の存在を確かめることが私達の今回の研究の目的となる．

2 パスカル的三角形を生成する一般化されたゲーム

本節では，第 1 節で提示された結果を一般化する．なお，カードゲームであっても，ロシアンルーレットを考えるときのデータ構造を用いることで，計算を明快なものにすることができる．ロシアンルーレットのデータ構造では，図 3 のような小さな正方形の集まりからなるシリンダーの中に実弾を配置しておいて，一番左の弾倉から順に引き金を引くことになる．

カードゲームの場合でも，図 3 の中に，カードが並んでいて，左端から取り出されると考えて計算する．なお，プレイヤーはカードがどのように並んでいるかは知らないとする．

そのように考えると，1 番目のプレイヤーが負ける確率は，1 番目のプレイヤーが負けるカードの並び方

の数をカードのすべての並べ方である ${}_nC_m$ で割ることで得られる．すると確率の分母は ${}_nC_m$ となるので，分子に来るべき 1 番目のプレイヤーが負けるカードの並び方の数がパスカル的な性質を持てば，結果として分母と分子が同時にパスカル的性質を持つことになる．

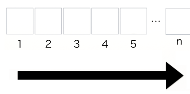


図 3: カードの並び　シリンダーの並び

定義 2.1. 定義 *1.1* のゲームにおいて，先手のプレイヤが負けるカード組み合わせの数を $U(p,n,m,s)$ とする．

定理 2.1.

$$U(p,n,m,s) = \sum_{h=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-m-h+1+ps}{ps} \rfloor} ({}_{n-(i-1)ps-h}C_{m-1})\Big). \tag{2.1}$$

Proof. $1 \le h \le s$ を満たす自然数 h に対し，もし $n-(i-1)ps-h \ge m-1$, すなわち $i \le \lfloor \frac{n-m-h+1+ps}{ps} \rfloor$ であるならば，第 $((i-1)ps+h)$ ラウンドで先手のプレイヤが負ける． □

次の定理 2.2 は良く知られた公式であるが，私達のゲームにおいても，本質的にはこの性質がパスカルの三角形に近い法則を作る．

定理 2.2.

$${}_nC_m + {}_nC_{m+1} = {}_{n+1}C_{m+1}. \tag{2.2}$$

定理 2.3.

$$U(p,n+1,m+1,s) = U(p,n,m+1,s) + U(p,n,m,s). \tag{2.3}$$

ここで考えているゲームの確率は $f(n,m,s) = \frac{U(p,n,m,s)}{{}_nC_m}$ となるので，このゲームで先手プレイヤーが負ける確率は，分母と分子がそれぞれパスカルの三角形のような性質を持つ．

Proof.

$$U(p,n+1,m+1,s) = \sum_{h=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-m-h+1+ps}{ps} \rfloor} ({}_{n+1-(i-1)ps-h}C_m)\Big). \tag{2.4}$$

$$U(p,n,m+1,s) = \sum_{h=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-m-h+ps}{ps} \rfloor} ({}_{n-(i-1)ps-h}C_m)\Big). \tag{2.5}$$

$$U(p,n,m,s) = \sum_{h=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-m-h+1+ps}{ps} \rfloor} ({}_{n-(i-1)ps-h}C_{m-1})\Big). \tag{2.6}$$

s を固定する．このとき，次の 3 つの式を比べることになる．式 (2.7) が式 (2.8) と式 (2.9) の和になれば証明は終る．

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-m-h+1+ps}{ps} \rfloor} ({}_{n+1-(i-1)ps-h}C_m). \tag{2.7}$$

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-m-h+ps}{ps} \rfloor} ({}_{n-(i-1)ps-h}C_m). \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-m-h+1+ps}{ps} \rfloor} ({}_{n-(i-1)ps-h}C_{m-1}). \tag{2.9}$$

$\lfloor \frac{n-m-h+1+ps}{ps} \rfloor \ge \lfloor \frac{n-m-h+ps}{ps} \rfloor \ge i \ge 1$ となるような i に対して，定理 2.2 を使うと，次の式が成り立つ．

$${}_{n+1-(i-1)ps-h}C_m = {}_{n-(i-1)ps-h}C_m + {}_{n-(i-1)ps-h}C_{m-1}. \tag{2.10}$$

(a) $\lfloor \frac{n-m-h+1+ps}{ps} \rfloor = \lfloor \frac{n-m-h+ps}{ps} \rfloor$ であれば，(2.10) からこの定理は成り立つ．
(b) 次の式が成り立つ場合を考える．

$$\lfloor \frac{n-m-h+1+ps}{ps} \rfloor > \lfloor \frac{n-m-h+ps}{ps} \rfloor. \tag{2.11}$$

とする．このときは，(2.7) が (2.8) と (2.9) の和になるためには，それぞれのシグマ記号の中で，$\lfloor \frac{n-m-h+1+ps}{ps} \rfloor$ 番目の項を比べることになるが，(2.8) にはそれがないので，(2.7) と (2.9) の $\lfloor \frac{n-m-h+1+ps}{ps} \rfloor$ 番目の項を比べることになる．従って，$i = \lfloor \frac{n-m-h+1+ps}{ps} \rfloor$ について，次の 2 つが等しくなれば良い．

$${}_{n+1-(i-1)ps-h}C_m. \tag{2.12}$$

$${}_{n-(i-1)ps-h}C_{m-1}. \tag{2.13}$$

(2.9) により

$$i = \frac{n-m-h+1+ps}{ps}. \tag{2.14}$$

となるので，これを (2.12) と (2.13) に代入すると，次のようになり等しいことがわかる．これで証明が終る．

$$\begin{aligned}
&{}_{n+1-(i-1)ps-h}C_m ={}_{n+1-(n-m-h+1)-h} C_m \\
&={}_m C_m = 1. \\
&{}_{n-(i-1)ps-h}C_{m-1} ={}_{n-(n-m-h+1)-h} C_{m-1} \\
&={}_{m-1} C_{m-1} = 1.
\end{aligned}$$

□

注意 2.1. 定理 *2.3* の証明を読んでいただければ分かるように，実際には組み合せの基本性質が隠れていて，それに気がつくとこのようなことが成り立つことは当たり前のように思えてくる．そう考えると，パスカルの三角形に似た性質を持つようなカードゲームというようなものはいくらでもありそうに思える．しかし，似たゲームの中にも必ずしもパスカルの三角形的な性質を持たないゲームがある．このことについては，*4* 節で考える．

3 パスカル的三角形から生成されるフィボナッチ的数列

論文の枚数に制限が有るので，ここでは私達の研究したゲームから生まれるパスカル的な三角形から作られるフィボナッチ的数列に関しては詳しくは述べない．

1 節で紹介した数列 b_{4n} と良く似た数列を作ることができた．二人のプレイヤーが交互にプレーして，自分のターンになると 2 回ずつカードを引くゲームを考える．これは $p = 2$ で，$s = 2$ の場合である．この場合に，三角形を斜めに足してできるフィボナッチ的な数列を $B_{2,2}(n)$ とおくと，$B_{2,2}(n)+(1+i^n+(-1)^n+(-i)^n)/4 = b_4(n+1)$ が成り立つ．
このことはまた別の機会に発表したい．

4 1 枚ずつ引いて，2 回赤のカードを引くと負けるケース

これまでの議論をさらに拡張して，プレイヤーは引いたカードを保管しておいて、集めた赤のカードが 2 枚になったプレイヤーが負けるというゲームを考える．しかし，議論が複雑になるので，プレイヤーの数を 2 名にする..

定義 4.1. カードが n 枚あり，その中に m 枚の赤のカードと $n-m$ 枚の白のカードがある．A と B の *2* 人のプレーヤーがゲームに参加し，A から始め，A と B が交互にカードを引く．プレイヤーはカードを保管しておき，集めたカードが *2* 枚になったら、そのプレーヤーが負けて，ゲームは終了する．従って，同じプレイヤーが *2* 回赤のカードを引くと負ける。このとき，A が負ける場合の数を $U_2(n,m)$ と書く．

例 4.1. 図 *4.1* は，$U_2(n,m)$ をパスカルの三角形のように並べたものである．すぐにわかるように，左側の三角形には 0 の部分がある．これは赤のカードが 1 枚しかない場合で，全く勝負がつかない場合である．左の三角形ではパスカルの三角形のような性質が成り立つ場所と，成り立たない場所がある．

確実に成り立つ場所だけを選び出すと右の三角形ができる．これは $m \geq 3$ の場合であって，赤のカードが *3* 枚以上あって，二人のプレイヤーのどちらかが必ず負ける場合である．

これまでの研究の結果としてわかることは，引き分けがないときはパスカルの三角形のような性質を満たすことが多いようである．

しかし，引き分けが成立するときでも，パスカルの三角形のような性質を満たす場所がある．これは難しい問題を与えてくれる．

0	
0 0	
0 1 1	1
0 1 2 1	2 1
0 3 7 3 1	. 7 3 1
0 3 10 10 4 1	16 10 4 1
0 6 22 20 14 5 1	22 26 14 5 1
0 6 28 42 34 19 6 1	28 48 40 19 6 1
0 10 50 70 76 53 25 7 1	50 76 88 59 25 7 1

補題 4.1. $k = \frac{n-m+1}{2}$ を満たす自然数 k に対して，${}_{n-2k-1}C_{m-2} ={}_{n-2k} C_{m-1} = 1$ となる．

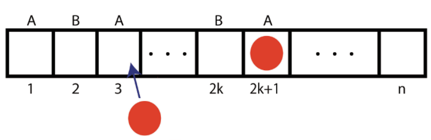
Proof. k に $\frac{n-m+1}{2}$ を代入すれば明らかである． □

定理 4.1. (*a*) $m \geq 3$ とすると，

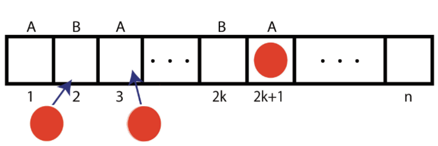
$$U_2(n,m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-2}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+2}{2} \rfloor} k^2({}_{n-2k-1}C_{m-3}).$$

(b) $m=2$ とすると， $U_2(n,m)=\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} k.$
したがって，A が負けとなる確率は $F(n,m)=\frac{U_2(n,m)}{{}_nC_m}$ となる．

Proof. まず (a) を示す．A は奇数番目のラウンドでカードを引くので，$2k+1$ 番目に，A が 2 枚目の赤のカードを引くとする．A が負ける場合は，次の 2 つの場合がある．
(i) A が 2 枚目の赤のカードを引くまでに，B が 1 枚も赤のカードを引かない場合を考える．これまでに，A は，$1,3,...,2k-1$ 回目ラウンドのどこかで 1 回赤を引くので，それは ${}_kC_1=k$ 通りある．$2k+1$ 回目以降に A と B がカードを引く回数は，$n-(2k+1)=n-2k-1$ 回あり，それらの機会に残りの赤のカード $m-2$ 枚が引かれるので，組み合わせは，${}_{n-2k-1}C_{m-2}$ 通りとなる．次に k の範囲を決める．残りの赤のカードの数は，



残りのカードの枚数を超えることはないので，k の範囲は $n-2k-1\geq m-2$ より $1\leq k\leq\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor$ となる．なお，当然 $2k+1\leq n$ であるが，$m\geq 3$ であるので，$n-2k-1\geq m-2$ だけ考えておけば良い．以上により A が 2 枚目の赤のカードを引くまでに，B が 1 枚も赤のカードを引かない場合は，$\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-2})$ 通りとなる．(ii) A が 2 枚目の赤のカードを引くまでに，B が 1 枚だけ赤のカードを引く場合．A は，$1,3,...,2k-1$ 回目のどこかで 1 回赤を引くので，それは ${}_kC_1=k$ 通りある．B は，$2,4,...,2k$ 回目のどこかで 1 回赤を引くので，それは ${}_kC_1=k$ 通りある．したがって，これらの場合は $k*k=k^2$ 通りとなる．す



でに 3 枚の赤のカードを使用しているため残りの赤のカードは $m-3$ 枚である．この $m-3$ 枚のカードが残りの $n-2k-1$ 回のラウンドにおいて引かれるので，その組み合わせは ${}_{n-2k-1}C_{m-3}$ 通りとなる．

次に，k の範囲を決める．残りの赤のカードの数は，残りのカードの枚数を超えることはないので，そのため k の範囲は，$n-2k-1\geq m-3$ より $1\leq k\leq\lfloor\frac{n-m+2}{2}\rfloor$ となる．なお，当然 $2k+1\leq n$ であるが，$m\geq 3$ であるので，$n-2k-1\geq m-3$ だけ考えておけば良い．A が 2 枚目の赤のカードを引くまでに，B が 1 枚だけ赤のカードを引く場合は $\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+2}{2}\rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-3})$ 通りとなる．A が負ける組み合わせは (i) と (ii) の和なので，

$$\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-2})+\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+2}{2}\rfloor} k^2({}_{n-2k-1}C_{m-3})$$

通りとなる．(b) を示す． $m=2$ とすると，A が 2 枚目の赤のカードを引いて負けるまでに，B が赤のカードを引くことはない．A が $2k+1$ ラウンド目に負けるとすると，$2k+1\leq n$ となり，$k\leq\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ となる．また，そのとき 1 回目に引く赤のカードの位置は A が引く，$1,3,...,2k-1$ ラウンドのどこかのはずなので，k 通りある．したがって，$U_2(n,m)=\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} k$ □

$U_2(n,m)$ は定理 2.2 にある ${}_nC_m$ の公式と同じタイプの公式を満たす．

定理 4.2. $m\geq 3$ とすると次の式が成り立つ．

$$U_2(n,m)+U_2(n,m+1)=U_2(n+1,m+1). \quad (4.1)$$

Proof. $m\geq 3$ であるから，定理 4.1 の (a) により，等式 (4.1) の左辺は，

$$\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-2})+\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+2}{2}\rfloor} k^2({}_{n-2k-1}C_{m-3})$$
$$+\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m}{2}\rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-1})+\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor} k^2({}_{n-2k-1}C_{m-2}). \quad (4.2)$$

等式 (4.1) の右辺は，

$$\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor} k({}_{n-2k}C_{m-1})+\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+2}{2}\rfloor} k^2({}_{n-2k}C_{m-2}).$$

等式 (4.1) を証明するために，下の等式 (4.3) と (4.4) を証明する．等式 (4.3) は，A が 2 枚目のカードを引くまでに B が赤のカードを引かない場合，等式 (4.4) は，A が 2 枚目のカードを引くまでに B が 1 枚の赤のカードを引く場合である．

$$\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-2})+\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m}{2}\rfloor} k({}_{n-2k-1}C_{m-1})$$
$$=\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor} k({}_{n-2k}C_{m-1}). \quad (4.3)$$

$$\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+2}{2}\rfloor} k^2({}_{n-2k-1}C_{m-3}) + \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor} k^2({}_{n-2k-1}C_{m-2}) = \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n-m+2}{2}\rfloor} k^2({}_{n-2k}C_{m-2}). \tag{4.4}$$

等式 (4.3) を証明する．次の (i) と (ii) の場合がある．

(i) $n-m$ が偶数のとき $\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor = \lfloor\frac{n-m}{2}\rfloor$ なので，$k = 1, 2, ..., \lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor$ に対して， 定理 2.2 により，

$$k({}_{n-2k-1}C_{m-2}) + k({}_{n-2k-1}C_{m-1}) = k({}_{n-2k}C_{m-1})$$

が成り立つので，等式 (4.3) が証明される．

(ii) $n-m$ が奇数のときは，$n-m = 2p+1$ とすると，$\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor = \lfloor\frac{2p+2}{2}\rfloor = p+1$ かつ $\lfloor\frac{n-m}{2}\rfloor = \lfloor\frac{2p+1}{2}\rfloor = p$ で，

$$\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor = \frac{n-m+1}{2} \tag{4.5}$$

である．まず，$k = 1, 2, 3, ..., p$ に関して，定理 2.2 により

$$k({}_{n-2k-1}C_{m-2}) + k({}_{n-2k-1}C_{m-1}) = k({}_{n-2k}C_{m-1}). \tag{4.6}$$

次に $k = p+1 = \frac{n-m+1}{2}$ のときを考える．(等式 (4.3) において，左辺の 1 つめのシグマにおける最終項と右辺のシグマにおける最終項を比べることになる．) 等式 (4.5) と補題 4.1 により，${}_{n-2k-1}C_{m-2} = {}_{n-2k}C_{m-1} = 1$ であるから，

$$k({}_{n-2k-1}C_{m-2}) = k({}_{n-2k}C_{m-1}). \tag{4.7}$$

等式 (4.6) と (4.7) により等式 (4.3) が証明される．

次に等式 (4.4) を証明する．

(i) $n-m$ が奇数のとき，$n-m = 2p+1$ とすると，$\lfloor\frac{n-m+2}{2}\rfloor = \lfloor\frac{2p+3}{2}\rfloor = p+1 = \lfloor\frac{2p+2}{2}\rfloor = \lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor$ となるので，定理 2.2 により，$k^2({}_{n-2k-1}C_{m-3}) + k^2({}_{n-2k-1}C_{m-2}) = k^2({}_{n-2k}C_{m-2})$ が成り立つので，等式 (4.4) が成り立つ．

(ii) $n-m$ が偶数のとき，$n-m = 2p$ とすると，$\lfloor\frac{n-m+2}{2}\rfloor = \frac{n-m+2}{2} = \lfloor\frac{2p+2}{2}\rfloor = p+1$ かつ $\lfloor\frac{n-m+1}{2}\rfloor = \lfloor\frac{2p+1}{2}\rfloor = p$ より $k = 1, 2, ..., p$ について $k^2({}_{n-2k-1}C_{m-3}) + k^2({}_{n-2k-1}C_{m-2}) = k^2({}_{n-2k}C_{m-2})$ となることと，補題 4.1 において m に $m-1$ を代入して使うことにより $k = \frac{n-m+2}{2}$ のとき $k^2({}_{n-2k-1}C_{m-3}) = k^2({}_{n-2k}C_{m-2})$ が成り立つことから，等式 (4.4) が成り立つ．以上により $U_2(n,m) + U_2(n,m+1) = U_2(n+1,m+1)$ は成り立つ． □

注意 4.1. 定理 *4.2* において，$m \geq 3$ という条件は赤のカードが 3 枚以上あるということなので，二人のうちでどちらかのプレイヤーが必ず負けること，すなわち引き分けがないことを意味する．

5 交互に2回ずつカードを引き,2回赤のカードを引くと負けるケース

定義 5.1. カードが n 枚あり，その中に m 枚の赤のカードと $n-m$ 枚の白のカードがある．A と B の *2* 人のプレーヤーがゲームに参加し，A から始め，A と B が交互に *2* 回ずつカードを引く．プレイヤーは引いたカードを保管しておく．同じプレーヤーが *2* 回赤のカードを引くと，そのプレーヤーが負けて，ゲームは終了する．このとき，A が負ける場合の数を $U_3(n,m)$ と書く．少し詳しく言うと，ゲームは A,A,B,B,A,A,B,B,... というふうに A,B の二人が *2* 回ずつカードを引いていく．ここで，A,A をプレイヤー A のターン，B,B をプレイヤー B のターン，続けて A,A をプレイヤー A のターン，B,B をプレイヤー B のターンと考える．カードを保管しておき, どちらかのプレイヤーが赤いカードを引いて，既に保管している赤のカードと合わせて２枚になったら負けとなる．

例 5.1. 図 *5.1* は，$U_3(n,m)$ をパスカルの三角形のように並べたものである．すぐにわかるように，左側の三角形には 0 の部分がある．これは赤のカードが 1 枚しかない場合で，全く勝負がつかない場合である．左の三角形ではパスカルの三角形のような性質が成り立つ場所と，成り立たない場所がある．

確実に成り立つ場所だけを選び出すと右の三角形ができる．これは $m \geq 3$ の場合であって，赤のカードが *3* 枚以上あって，二人のプレイヤーのどちらかが必ず負ける場合である．

これまでの研究の結果としてわかることは，引き分けがないときはパスカルの三角形のような性質を満たすことが多いようである．

しかし，引き分けが成立するときでも，パスカルの三角形のような性質を満たす場所がある．これは難しい問題を与えてくれる．

良く観察してみると次のようなことがわかる．引き分けのない $m \geq 3$ の場所はすべてパスカルの三角形的な性質が成り立つが，引き分けがあっても，$n = 4t+2, 4t+3, 4t+4$ の所ではパスカルの三角形の性質が成立している

0	
0 1	
0 1 1	1
0 1 2 1	2 1
0 3 7 3 1	7 3 1
0 6 16 10 4 1	16 10 4 1
0 6 22 26 14 5 1	22 26 14 5 1
0 6 28 48 40 19 6 1	28 48 40 19 6 1
0 10 50 76 88 59 25 7 1	50 76 88 59 25 7 1

定理 5.1. (a) $m \geq 3$ のとき，

$$U_3(n,m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+5}{4} \rfloor} (2k-2)({}_{n-4k+3}C_{m-2}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+4}{4} \rfloor} (2k-1)({}_{n-4k+2}C_{m-2}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+6}{4} \rfloor} (2k-2)^2({}_{n-4k+3}C_{m-3}) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+5}{4} \rfloor} (2k-1)(2k-2)({}_{n-4k+2}C_{m-3}) \tag{5.1}$$

(b) $m=2$ のとき，$U_3(n,m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+3}{4} \rfloor} (2k-2) + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor} (2k-1)$.
(c) $m=1$ のとき，$U_3(n,m) = 0$.
したがって，A が負けとなる確率は $F(n,m) = \frac{U_3(n,m)}{{}_nC_m}$ となる．

Proof. まず，(a) を証明する．プレイヤー A がカードを引くのは，$1, 2, 5, 6, ..., 4k-3, 4k-2, ...$ ラウンドである．
A が負ける場合は，次の 2 つの場合 (i) と (ii) がある．
(i) A が 2 枚目の赤のカードを引くまでに，B が 1 枚も赤のカードを引かない場合を考える．ここで 2 つの場合 $(i.a)$ と $(i.b)$ に分ける．
$(i.a)$　A が $4k-3$ 回目のラウンドで赤のカードを引き，それまでに既に 1 枚の赤のカードを引いていたので，ここで負けるという場合を考える．なお k は自然数である．このとき，A は，$1, 2, 5, 6, ...4k-6$ 回目のどこかで 1 回赤を引くので，それは $2k-2$ 通りある．$4k-3$ 回目以降の引く回数は，$n-(4k-3) = n-4k+3$ 回あり，そこで残りの赤のカード $m-2$ 枚を引くので，組み合わせは，${}_{n-4k+3}C_{m-2}$ 通りとなる．次に k の範囲を決める．残りの赤のカードの数は，残りのカードの枚数を超えることはないので，k の範囲は $n-4k+3 \geq m-2$ より $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-m+5}{4} \rfloor$ となる．従ってこの場合の組み合せの数は $\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+5}{4} \rfloor} (2k-2)({}_{n-4k+3}C_{m-2})$ 通りとなる．
$(i.b)$ A が $4k-2$ 回目のラウンドで赤のカードを引き，それまでに既に 1 枚の赤のカードを引いていたので，ここで負けるという場合を考える．なお k は自然数である．これまでに，A は，$1, 2, 5, 6..., 4k-6, 4k-3$ 回目のどこかで 1 回赤を引くので，それは $2k-1$ 通りある．$4k-2$ 回目以降の引く回数は，$n-(4k-2) = n-4k+2$ 回あり，残りの赤のカードは $m-2$ 枚あるので，この組み合わせは，${}_{n-4k+2}C_{m-2}$ 通りとなる．次に k の範囲を決める．残りの赤のカードの数は，残りのカードの枚数を超えることはないので，k の範囲は $n-4k+2 \geq m-2$ より $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-m+4}{4} \rfloor$ となる．従って，この場合の数は $\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+4}{4} \rfloor} (2k-1)({}_{n-4k+2}C_{m-2})$ 通りとなる．
(ii) A が 2 枚目の赤のカードを引くまでに，B が 1 枚赤のカードを引く場合を考える．ここで 2 つの場合 $(ii.a)$ と $(ii.b)$ に分ける．
$(ii.a)$ A が $4k-3$ 回目のラウンドで赤のカードを引き，それまでに既に 1 枚の赤のカードを引いていたので，ここで負けるという場合を考える．なお k は自然数である．これまでに，A は，$1, 2, 5, 6, ..., 4k-6$ 回目のどこかで 1 回赤を引くので，それは $2k-2$ 通りある．また,B は $3, 4, 7, 8, ...4k-4$ 回目のどこかで 1 回赤を引くので，それは $2k-2$ 通りある．$4k-3$ 回目以降の引く回数は，$n-(4k-3) = n-4k+3$ 回あり，それらの機会に残りの赤のカードは $m-3$ 枚を引くので、組み合わせは，${}_{n-4k+3}C_{m-3}$ 通りとなる．次に k の範囲を決める．残りの赤のカードの数は，残りのカードの枚数を超えることはないので，k の範囲は $n-4k+3 \geq m-3$ より $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-m+6}{4} \rfloor$ となる．従って，この場合の数は $\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+6}{4} \rfloor} (2k-2)^2({}_{n-4k+3}C_{m-3})$ 通りとなる．
$(ii.b)$ A が $4k-2$ 回目のラウンドで赤のカードを引き，それまでに既に 1 枚の赤のカードを引いていたので，ここで負けるという場合を考える．なお k は自然数である．A は，$1, 2, 5, 6, ..., 4k-3$ 回目のどこかで 1 回赤を引くので，それは $2k-1$ 通りある．また,B は $3, 4, 7, 8, ..., 4k-4$ 回目のどこかで 1 回赤を引くので，それは $2k-2$ 通りある．$4k-3$ 回目以降の引く

回数は，$n-(4k-2)=n-4k+2$ 回あり，残りの赤のカードは $m-3$ 枚あるので，この組み合わせは，${}_{n-4k+2}C_{m-3}$ 通りとなる．次に k の範囲を決める．残りの赤のカードの数は，残りのカードの枚数を超えることはないので，k の範囲は $n-4k+2 \geq m-3$ より $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-m+5}{4} \rfloor$ となる．従って，この場合の数は $\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+5}{4} \rfloor} (2k-1)(2k-2)({}_{n-4k+2}C_{m-3})$ 通りとなる．

A が負ける組み合わせは $(i.a)$,$(i.b)$,$(ii.a)$,$(ii.b)$ の和なので等式 (5.1) が成り立つ．

次に (b) を証明する．$m=2$ の場合は，A が 2 枚引いて負けるときに，B は 1 枚も引かないので公式は簡単にでる．

(c) の場合は，赤のカードが 1 枚しかないので，A が負ける可能性は 0 であるから，結論は明らか． □

補題 5.1. $3 \leq m \leq n$ を満たすような自然数 n, m に対して次のように決める．

$$g1(n,m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+5}{4} \rfloor} (2k-2)({}_{n-4k+3}C_{m-2}) \tag{5.2}$$

$$g2(n,m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+4}{4} \rfloor} (2k-1)({}_{n-4k+2}C_{m-2}) \tag{5.3}$$

$$g3(n,m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+6}{4} \rfloor} (2k-2)^2({}_{n-4k+3}C_{m-3}) \tag{5.4}$$

$$g4(n,m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+5}{4} \rfloor} (2k-1)(2k-2)({}_{n-4k+2}C_{m-3}). \tag{5.5}$$

このとき，次の式が成り立つ．

$$g1(n+1,m+1) = g1(n,m+1) + g1(n,m). \tag{5.6}$$

$$g2(n+1,m+1) = g2(n,m+1) + g2(n,m). \tag{5.7}$$

$$g3(n+1,m+1) = g3(n,m+1) + g3(n,m). \tag{5.8}$$

$$g4(n+1,m+1) = g4(n,m+1) + g4(n,m). \tag{5.9}$$

Proof. $g4(n,m)$ について証明する．$g1(n,m), g2(n,m), g3(n,m)$ の場合も同様である．

$$g4(n+1,m+1) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+5}{4} \rfloor} (2k-1)(2k-2)_{n+1-4k+2}C_{m+1-3} \tag{5.10}$$

$$g4(n,m+1) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1-m+5}{4} \rfloor} (2k-1)(2k-2)_{n-4k+2}C_{m+1-3} \tag{5.11}$$

かつ

$$g4(n,m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+5}{4} \rfloor} (2k-1)(2k-2)_{n-4k+2}C_{m-3}. \tag{5.12}$$

(a) $\lfloor \frac{n-m+5}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n-1-m+5}{4} \rfloor$ とすると，$1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-m+5}{4} \rfloor$ を満たす k に対して，定理 2.2 により，

$$\begin{aligned} &(2k-1)(2k-2)_{n+1-4k+2}C_{m+1-3} \\ &= (2k-1)(2k-2)_{n-4k+2}C_{m+1-3} \\ &+ (2k-1)(2k-2)_{n-4k+2}C_{m-3}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

となり，従って (5.9) を得る．

(b) $\lfloor \frac{n-m+5}{4} \rfloor > \lfloor \frac{n-1-m+5}{4} \rfloor$ のときを考える．まず，$1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1-m+5}{4} \rfloor$ のときは，(5.13) が成り立つ．次に $k = \frac{n-m+5}{4}$ とすると，

$$\begin{aligned} &(2k-1)(2k-2)_{n+1-4k+2}C_{m+1-3} \\ &= (2k-1)(2k-2)_{m+1-3}C_{m+1-3} \\ &= (2k-1)(2k-2) \\ &= (2k-1)(2k-2)_{m-3}C_{m-3} \\ &= (2k-1)(2k-2)_{n-4k+2}C_{m-3}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

となり，従って (5.9) を得る． □

定理 5.2. $3 \leq m \leq n$ を満たすような自然数 n, m に対して

$$U_3(n+1,m+1) = U_3(n,m+1) + U_3(n,m). \tag{5.15}$$

Proof. $U_3(n,m) = g1(n,m) + g2(n,m) + g3(n,m) + g4(n,m)$ であるから，補題 5.1 から明らか． □

補題 5.2. 次の等式が成り立つ．

$$U_3(2+4t,2) = U_3(3+4t,2) = U_3(4+4t,2). \tag{5.16}$$

$$U_3(3+4t,2) = U_3(2+4t,1) + U_3(2+4t,2). \tag{5.17}$$

$$U_3(4+4t,2) = U_3(3+4t,1) + U_3(3+4t,2). \tag{5.18}$$

$$U_3(3+4t,3) = U_3(2+4t,2) + U_3(2+4t,3). \tag{5.19}$$

$$U_3(4+4t,3) = U_3(3+4t,2) + U_3(3+4t,3). \tag{5.20}$$

Proof. 定理 5.1 の (b) により，

$$\begin{aligned} &U_3(2+4t,2) = U_3(3+4t,2) = U_3(4+4t,2) \\ &= \sum_{k=1}^{t+1} 2(k-1) + \sum_{k=1}^{t+1}(2k-1) \\ &= 2t^2+3t+1. \end{aligned} \tag{5.21}$$

従って，(5.16) が得られた．また，$U_3(2+4t,1) = U_3(3+4t,1) = 0$ なので，(5.17) と (5.18) も得られる．

次に，定理 5.1 の (a) により，

$$\begin{aligned} &U_3(2+4t,3) \\ &= \sum_{k=1}^{t+1}(2k-2)(2+4t-4k+3) \\ &+ \sum_{k=1}^{t}(2k-1)(2+4t-4k+2) \\ &+ \sum_{k=1}^{t+1}(2k-2)^2 + \sum_{k=1}^{t+1}(2k-1)(2k-2) \\ &= \frac{8}{3}t\left(2t^2+3t+1\right) \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} &U_3(3+4t,3) \\ &= \sum_{k=1}^{t+1}(2k-2)(3+4t-4k+3) \\ &+ \sum_{k=1}^{t+1}(2k-1)(3+4t-4k+2) \\ &+ \sum_{k=1}^{t+1}(2k-2)^2 + \sum_{k=1}^{t+1}(2k-1)(2k-2) \\ &= \frac{1}{3}\left(16t^3+30t^2+17t+3\right). \end{aligned} \tag{5.23}$$

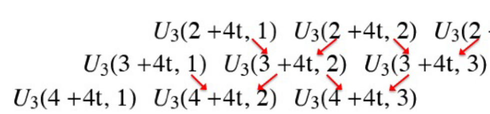
$$\begin{aligned} &U_3(4+4t,3) \\ &= \sum_{k=1}^{t+1}(2k-2)(4+4t-4k+3) \\ &+ \sum_{k=1}^{t+1}(2k-1)(4+4t-4k+2) \\ &+ \sum_{k=1}^{t+1}(2k-2)^2 + \sum_{k=1}^{t+1}(2k-1)(2k-2) \\ &= \frac{2}{3}\left(8t^3+18t^2+13t+3\right). \end{aligned} \tag{5.24}$$

(5.21) と (5.22) の和が (5.23) となるので，(5.19) が得られた．

また，(5.21) と (5.24) の和が (5.23) となるので，(5.20) が得られた． □

補題 5.2 の結果を図にすると，次のようになる．パスカルの三角形的な性質が満たされている．この図は例 5.1 で見たことを実際に証明したことを表している．

既に分かっているように，引き分けのない $m \geq 3$ の場所はすべてパスカルの三角形的な性質が成り立つが，引き分けがあっても，$n = 4t+2, 4t+3, 4t+4$ の所ではパスカルの三角形の性質が成立している．そのことをここで図で説明している．



Reference

[1] Miyadera,R., Kitagawa,M., Suzuki,S.and etc.,Y Pascal-Like Triangles and Fibonacci-Like Sequences Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games

[2] Matsui, H., Minematsu, D., Yamauchi T., Miyadera, R.: Pascal-like triangles and Fibonacci-like sequences, Mathematical Gazette, 2010.

[3] Matsui, H., Saita, N., Kawata, K., Sakurama Y., Miyadera, R.: Elementary Problems, B-1019, Fibonacci Quarterly, series 44.3, (2006).