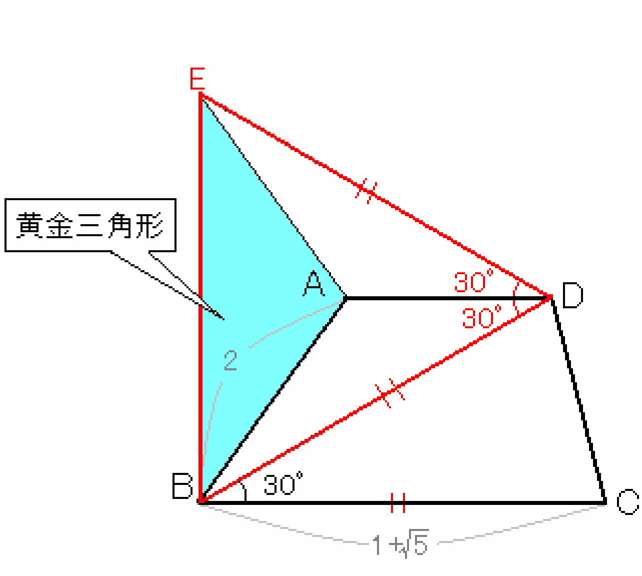
パズマティックス　問題集1　解答

点/50

配点：各 10 点

1　AD//BC の台形 ABCD があります。
AB=2、BC=BD=$1+\sqrt{5}$、$\angle DBC = 30°$ です。
$\angle A > 90°$ のとき、∠ABD の大きさは何度ですか。



解答

△ABD を、AD を軸に対称移動して、B が移動した点を E とすると、

BD=ED、$\angle BDE = 30° + 30° = 60°$

より、△BDE は正三角形と分かります。

なので、

$$EB = BD = 1+\sqrt{5}$$

ここで、△AEB に注目すると、

AE=AB=2

から、

$$AE : EB = 2 : \left(1+\sqrt{5}\right) = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

となり、△AEB は黄金三角形であることが分かります。

よって、

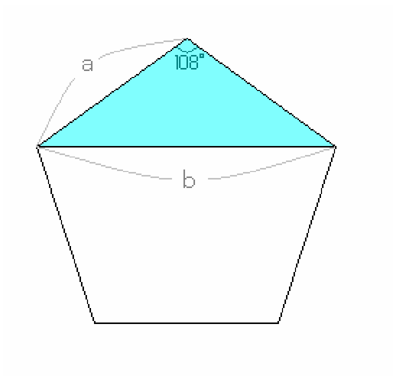
$$\angle EAB = 108°$$
$$\angle ABE = \left(180° - 108°\right) \div 2 = 36°$$

したがって、求める角度は、

$$\angle ABD = \angle EBD - \angle EBA$$
$$= 60° - 36° = 24°$$

答え：$\angle ABD = 24°$

参考　黄金三角形



黄金三角形とは、正五角形の対角線を引いたときにできる三角形のことで、左の図で、

$$a : b = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

が成り立ちます。このとき、左図の青い三角形は、二等辺三角形になっていて、頂角は108°になります。

② 次の計算をしなさい。

(1) $33858 \times 31174 - 33826 \times 31142 - 80000$

解答

$$
\begin{aligned}
&33858 \times 31174 - 33826 \times 31142 - 80000 \\
&= (32516 + 1342)(32516 - 1342) - (32484 + 1342)(32484 - 1342) - 80000 \\
&= (32516^2 - 1342^2) - (32484^2 - 1342^2) - 80000 \\
&= 32516^2 - 1342^2 - 32484^2 + 1342^2 - 80000 \\
&= 32516^2 - 32484^2 - 80000 \\
&= (32516 + 32484)(32516 - 32484) - 80000 \\
&= 65000 \times 32 - 80000 \\
&= 2080000 - 80000 \\
&= 2000000
\end{aligned}
$$

答え:2000000

(2) $3.456^3 + 30 \times 3.456 \times 6.544 + 6.544^3$

解答

$$
\begin{aligned}
&3.456^3 + 30 \times 3.456 \times 6.544 + 6.544^3 \\
&= 3.456^3 + 3 \times 10 \times 3.456 \times 6.544 + 6.544^3 \\
&= 3.456^3 + 3 \times 3.456 \times 6.544 \times (3.456 + 6.544) + 6.544^3 \\
&= 3.456^3 + 3 \times 3.456^2 \times 6.544 + 3 \times 3.456 \times 6.544^2 + 6.544^3
\end{aligned}
$$

ここで、$3.456 = A$、$6.544 = B$とすると、

$$
\begin{aligned}
&A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\
&= (A + B)^3 \\
&= (3.456 + 6.544)^3 \\
&= 10^3 \\
&= 1000
\end{aligned}
$$

答え:1000

3 $[x]$を、xの整数部分とします。

たとえば、$[3.14]=3$、$\left[\dfrac{15}{7}\right]=2$です。

このとき、方程式$\dfrac{1}{4}[x]=x-[x]$を解きなさい。

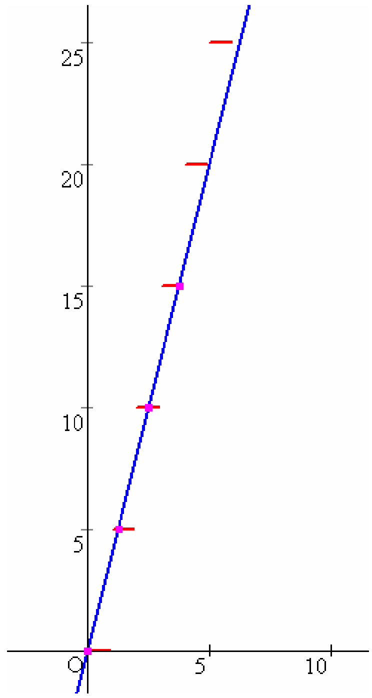
解答

$$\frac{1}{4}[x]=x-[x]$$

$$[x]=4x-4[x]$$

$$5[x]=4x$$

つまり、$y=5[x]$…①のグラフと$y=4x$…②の交点のx座標が、与えられた方程式の解となります。



①は、

$0\le x<1$　で　$[x]=0$　よって　$y=5[x]=0$
$1\le x<2$　で　$[x]=1$　よって　$y=5[x]=5$
$2\le x<3$　で　$[x]=2$　よって　$y=5[x]=10$
$3\le x<4$　で　$[x]=3$　よって　$y=5[x]=15$　…

となっていくので、右図の赤い線の部分になります。

②は、右図の青い線です。

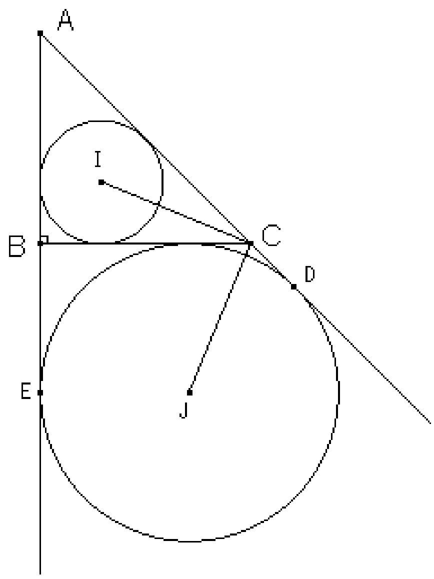
①と②のグラフの交点のx座標は、

$$x=0,\frac{5}{4},\frac{5}{2},\frac{15}{4}$$

したがって、これが求める解です。　　答え: $x=0,\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{2},\dfrac{15}{4}$

注意!　$x=5$は解ではないことに注意してください。
①のグラフは$x=5$のとき、$y=5[5]=25$　より、$(5,20)$　は通りません。
しかし、②のグラフは、$x=5$のとき、$y=4\cdot 5=20$　より、$(5,20)$を通ります。
なので、$x=5$は解ではないことが分かります。

4 右図で、△ABCは、$\angle ABC=90°$の直角二等辺三角形です。また、円Iは△ABCの内接円、円Jは△ABCの傍接円のひとつです。このとき、IC=JCを証明しなさい。



解説 IC=JCを証明するには、△ICJが二等辺三角形であることを証明します。

解答

(証明)四角形BICJにおいて、

内心の性質と傍心の性質から、

$$①\begin{cases}\angle IBC=\dfrac{1}{2}\angle ABC\\[2mm]\angle JBC=\dfrac{1}{2}\angle EBC\end{cases}\qquad ②\begin{cases}\angle ICB=\dfrac{1}{2}\angle ACB\\[2mm]\angle JCB=\dfrac{1}{2}\angle DCB\end{cases}$$

①から、

$$\angle IBC+\angle JBC=\frac{1}{2}\left(\angle ABC+\angle EBC\right)$$

$$\angle IBJ=\frac{1}{2}\angle ABE=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$$

②から、

$$\angle ICB+\angle JCB=\frac{1}{2}\left(\angle ACB+\angle DCB\right)$$

$$\angle ICJ=\frac{1}{2}\angle ACD=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$$

だから、$\angle IBJ+\angle ICJ=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ より、

四角形 BICJ の対角の和が180°なので、これは円に内接する四角形である。

△ICJ において、

①から、$\angle JBC=\frac{1}{2}\angle EBC=\frac{1}{2}\cdot 90^\circ=45^\circ$ なので、

円周角の定理から、$\angle JIC=\angle JBC=45^\circ$

これと、$\angle ICJ=90^\circ$ から、

$$\angle IJC=180^\circ-\left(45^\circ+90^\circ\right)=45^\circ=\angle JIC$$

よって、△ICJ の 2 つの内角が等しいから、これは IC=JC の二等辺三角形である。

よって題意は証明された。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）