パズマティックス　問題集２	名前	解答	点/50

配点：1　10点　2　10点　3　20点　4　10点

1　次の計算をしなさい。

$$_{100}C_{98} - {}_{99}C_{97} + {}_{98}C_{96} - {}_{97}C_{95} + {}_{96}C_{94} - \cdots - {}_{3}C_{1}$$

ただし、$_{n}C_{r}$ は、n 個の中から r 個を選ぶ組み合わせを表します。

解答　計算しやすいように、式を変形します。

$_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$ だから、

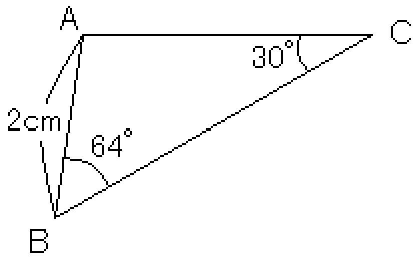
$$_{100}C_{98} = {}_{100}C_{100-98} = {}_{100}C_{2} = \frac{100 \times 99}{2 \times 1} = 50 \times 99$$

他の項も同じように、

$$_{100}C_{98} - {}_{99}C_{97} + {}_{98}C_{96} - {}_{97}C_{95} + {}_{96}C_{94} - \cdots - {}_{3}C_{1}$$
$$= 50 \times 99 - 49 \times 99 + 49 \times 97 - 48 \times 97 + 48 \times 95 - \cdots - 1 \times 3$$
$$= 99(50 - 49) + 97(49 - 48) + 95(48 - 47) + \cdots + 3(2 - 1)$$
$$= 99 + 97 + 95 + 93 + 91 + \cdots + 5 + 3$$
$$= (99 + 1) \times 50 \div 2 - 1$$
$$= 100 \times 50 \div 2 - 1$$
$$= 2500 - 1$$
$$= 2499$$

答え：2499

2　右図のような△ABC の外接円の面積は何 cm^2 ですか。ただし円周率は π とします。



解答　円周角の定理を活用します。

まず、△ABC と同じ外接円を持つ△ABD を考えます。

2 つの三角形は AB を共有し、同じ円の中に内接しているので、

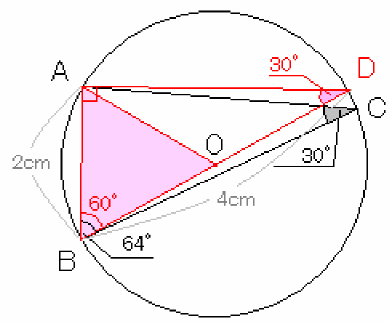
$$\angle ADB = 30^\circ$$

円周角の定理の逆より、A,B,C,D は同一円周上にあります。

さて、ここで、BD は中心を通るとすると、円周角の定理より、

$$\angle DAB = 90^\circ、\angle ABO = 60^\circ$$

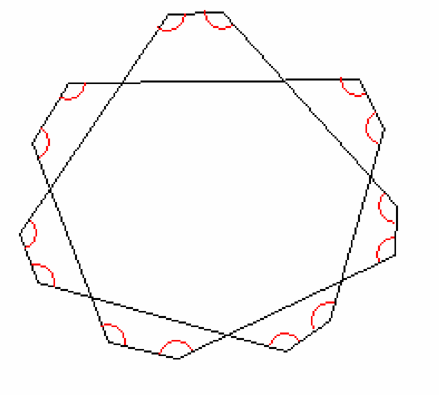
よって、三平方の定理より、$BD = 2AB = 4cm$。外接円の半径は $2cm$ で、



求める面積は　$2^2\pi = 4\pi(cm^2)$

答え:4π cm^2

③　左の、印をつけた角の大きさの和を求めなさい。



解答　図の、ひとつのカドについて考えます。

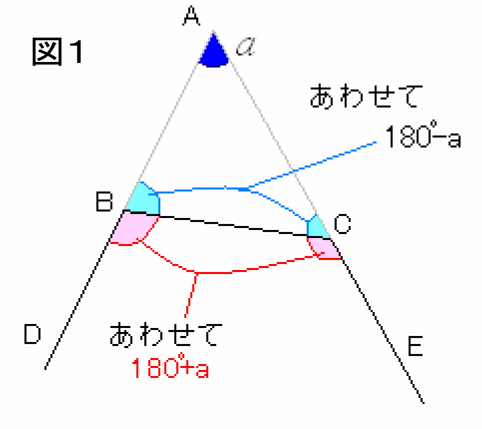
まず、図1のようにカドをなす 2 本の線をそれぞれ延長してできる角を、「ツノ」と呼ぶことにします。(この場合、∠A が「ツノ」です。) $\angle A = a$ とすると、三角形の内角の和は 180 度ですから、

$$\angle ABC + \angle ACB = 180° - a$$

また、$\angle ABD + \angle ACE = 360°$ ですから、

$$\begin{aligned} &\angle CBD + \angle BCE \\ &= (\angle ABD - \angle ABC) + (\angle ACE - \angle ACB) \\ &= (\angle ABD + \angle ACE) - (\angle ABC + \angle ACB) \\ &= 360° - (180° - a) \\ &= 180° + a \end{aligned}$$

図1

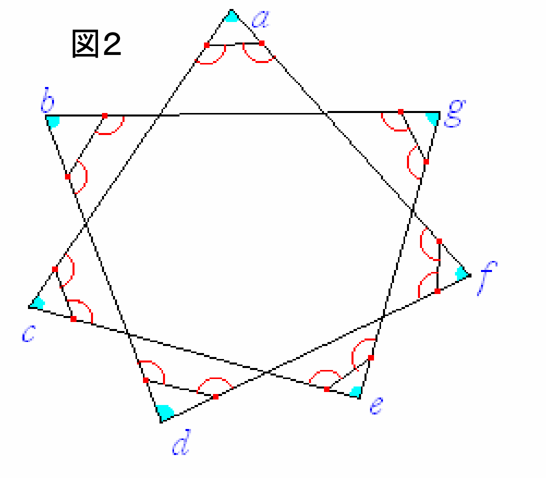


他のカドについてもできるツノの大きさも、$b, c, d, \cdots, g$ として計算していくと、

問題の印のついた角の大きさは、

$$180° \times 7 + (a+b+c+d+e+f+g) \quad \cdots ①$$

図2



$a+b+c+d+e+f+g$ の値について考えます。

これは、図 3 のようにするとわかりやすいです。

青い三角形の内角の和が 180° で、

ピンクの三角形の内角の和が 180° で、

赤い星型の頂点の角の和が 180° ですから、

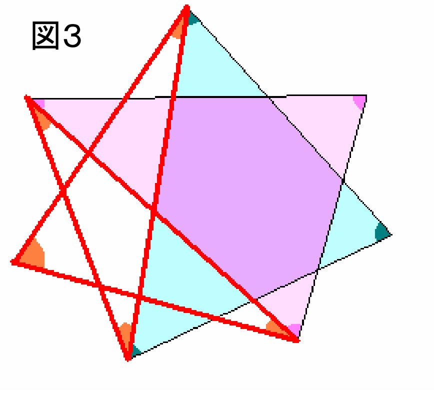
$$a+b+c+d+e+f+g = 180° + 180° + 180° = 540°$$

です。

これを①に代入すると、

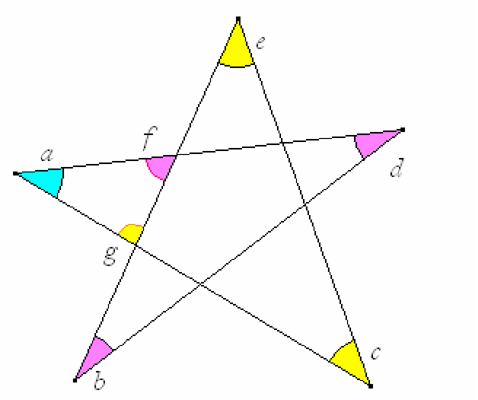
$$① = 180° \times 7 + 540° = 1800°$$

図3



答え:1800°

参考 星型の頂点の角の和



左図で、$a+b+c+d+e=180°$になります。

三角形の外角定理から、

$$b+d=f\cdots① \quad c+e=g\cdots②$$

$a+b+c+d+e$に①，②を代入すると、

$a+(b+d)+(c+e)$

$=a+f+g$

これは、三角形の内角の和に等しいので180°です。

4 各桁の数の和が9の倍数である整数は、9の倍数であることを証明しなさい。

解答例

(証明) 仮に、1の位がa、10の位がb、100の位がcの整数があるとする。(a,b,cは自然数)

すると、この整数は次のように表される。

$$100c+10b+a$$

この式を変形して、

$$99c+9b+(a+b+c)$$
$$=9(11c+b)+(a+b+c)$$

となる。

$9(11c+b)$は9の倍数なので、$a+b+c$が9の倍数ならば、すなわち各桁の数の和が9の倍数ならば、この整数は9の倍数である。

同じように、1の位がa、10の位がb、100の位がc、1000の位がd ・・・・・・・・・・の整数があるとする。

($a,b,c,d,e,f\cdots$は自然数)

すると、この整数は

$$a+10b+100c+1000d+10000e+100000f+\cdots$$

と表され、コレを変形すると、

$$(a+b+c+d+e+f+\cdots)+9b+99c+999d+9999e+99999f+\cdots$$
$$=(a+b+c+d+e+f+\cdots)+9(b+11c+111d+1111e+11111f+\cdots)$$

となる。

$9(b+11c+111d+1111e+11111f+\cdots)$は9の倍数なので、$(a+b+c+d+e+f+\cdots)$が9の倍数ならば、すなわち各桁の数の和が9の倍数ならば、この整数は9の倍数である。

よって題意は証明された。

(証明終わり)