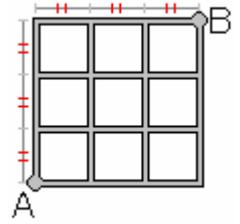


① 右図のように、タテ・ヨコにそれぞれ等間隔に4本の道が

交わってできている街道があります。いま、A地点に太郎君が、B地点に花子さんがいます。

2人は同時にスタートし、太郎君はA地点からB地点に、花子さんはB地点からA地点に、2人とも同じ速度で移動します。

このとき、途中で2人が出会う確率はいくらですか。



### 解答

まず、太郎君と花子さんの移動パターンは何通りか考えます。

A 地点から B 地点まで行くのに、右に進むのを→、上に進むのを↑とあらわすと、太郎君が A 地点から B 地点まで行く行き方は、→3 つと↑3 つの並び方の数に等しいです。

$$\text{したがって、} {}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ (通り)}$$

花子さんについても、20 通り。

なので、太郎君と花子さんの移動パターンの総数は、 $20 \times 20 = 400$  (通り)

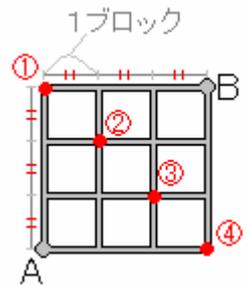
ここで、右図のような道を「1ブロック」とします。

2人は最短距離で移動するので、目的地に到着するまで、6 ブロック分移動することになります。

そして、2人は同じ速度なので、2人が出会うまでにそれぞれ歩いた距離は、

$$6 \div 2 = 3 \text{ (ブロック分)}$$

となります。したがって、太郎君と花子さんは、それぞれのスタート地点から3ブロック分進んだ、右図の①、②、③、④のポイントのいずれかで出会います。



[i] ①か④で出会う場合

①への行き方は、太郎君についても、花子さんについても1通りですから、①で出会う場合の数は、

$$1 \times 1 = 1 \text{ (通り)}$$

④で出会う場合の数も、1通り。

だから、①か④で出会う場合の数は、

$$1 + 1 = 2 \text{ (通り)}$$

[ii] ②か③で出会う場合

②への行き方は、太郎君についても、花子さんについても3通りずつありますから、②で出会う場合の数は、

$$3 \times 3 = 9 \text{ (通り)}$$

③で出会う場合の数も、9通り。

だから、②か③で出会う場合の数は、

$$9 + 9 = 18 \text{ (通り)}$$

[i]と[ii]は同時に起こらないから、和の法則から、①か②か③か④で出会う場合の数は、

$$2 + 18 = 20 \text{ 通り}$$

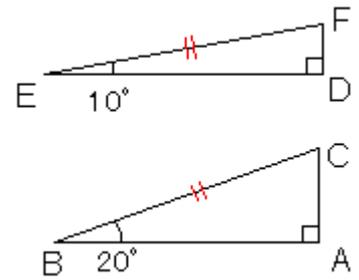
よって、求める確率は、 $\frac{20}{400} = \frac{1}{20}$

答え:  $\frac{1}{20}$

② 直角三角形ABCとDEFがあり、それぞれ次のことがわかっています。

$$\begin{aligned} \angle A = \angle D = 90^\circ, \angle B = 20^\circ, \angle E = 10^\circ \\ BC = EF \\ BC > AC \quad EF > DF \end{aligned}$$

このとき、 $(AB + DE) : (AC + DF)$ を求めなさい。



解答

$BC = EF$  から、BCとEFはぴったりくっつきます。  
 ここで、BとE、CとFがそれぞれくっつくように、2つの三角形を配置します。(図1)  
 $\angle DBA = 30^\circ, \angle DCA = 150^\circ$ となります。  
 DからABに下ろした垂線の足をH、  
 CからDHに下ろした垂線の足をIとします。  
 ここで、 $DH = a, IC = b$ とします。

$\triangle BDH$ に着目すると、三平方の定理から、

$$\begin{aligned} BD &= 2a \\ BH &= \sqrt{3}a \end{aligned} \quad (\text{図 2})$$

また、 $\triangle CDI$ に着目すると、三平方の定理から、

$$\begin{aligned} DC &= 2b \\ DI &= \sqrt{3}b \end{aligned} \quad (\text{図 3})$$

なので、

$$\begin{aligned} AC &= HI = DH - DI = a - \sqrt{3}b \\ HA &= IC = b \\ AB &= BH + HA = \sqrt{3}a + b \end{aligned}$$

となります。ここで、求めた長さをまとめると、図4のようになります。

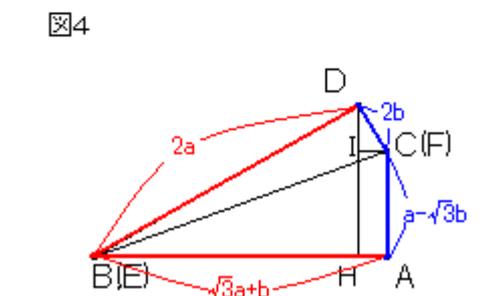
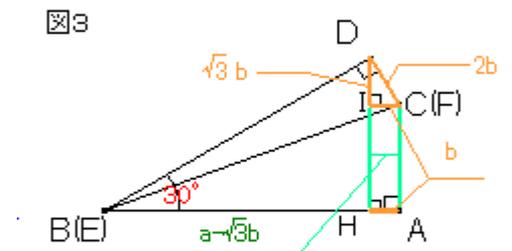
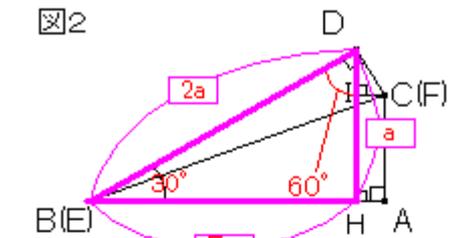
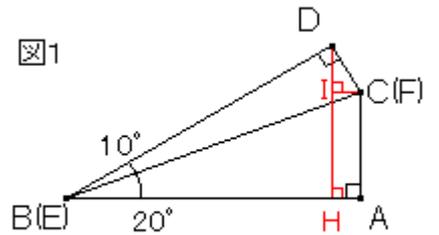
求める比 $(AB + DE) : (AC + DF)$ は、

$$\begin{aligned} &\{(\sqrt{3}a + b) + 2a\} : \{(a - \sqrt{3}b) + 2b\} \\ &= (2a + \sqrt{3}a + b) : (a + 2b - \sqrt{3}b) \\ &= \{(2 + \sqrt{3})a + b\} : \{a + (2 - \sqrt{3})b\} \end{aligned}$$

右の項を $2 + \sqrt{3}$ 倍すると、

$$\begin{aligned} &\{a + (2 - \sqrt{3})b\}(2 + \sqrt{3}) \\ &= (2 + \sqrt{3})a + (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})b \\ &= (2 + \sqrt{3})a + b \end{aligned}$$

となり、左の項と一致するので、



$$\begin{aligned} & \{(2+\sqrt{3})a+b\} : \{a+(2-\sqrt{3})b\} \\ &= (2+\sqrt{3})\{a+(2-\sqrt{3})b\} : \{a+(2-\sqrt{3})b\} \\ &= (2+\sqrt{3}) : 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{答え: } (2+\sqrt{3}) : 1}$$

③ 最大 15 人までかけられる長いすがたくさんあります。

(1) ある団体Aの全員が、1つの長いすに  $x$  人座るとちょうど20脚、1つの長いすに  $y$  人ずつ座るとちょうど16脚におさまります。  
団体Aの人数を考えられるだけ求めなさい。

**解答**

問題文から、

$$20x = 16y$$

が導かれ、この式から、

$$x : y = 4 : 5$$

が分かります。

ここで、 $x : y = 4 : 5$  を満たす自然数の組  $(x, y)$  を考えると、

$$(x, y) = (4, 5), (8, 10), (12, 15), (16, 20), (20, 25) \dots$$

ここで、長いすに座れるのは 15 人までなので、 $x$  か  $y$  のどちらか 1 つでも 15 を超えている解は題意を満たしません。

したがって、

$$(x, y) = (4, 5), (8, 10), (12, 15)$$

それぞれについて人数を求めると、

$$(x, y) = (4, 5) \text{ のとき} \quad \text{団体の人数は } 20 \times 4 = 16 \times 5 = 80 \text{ (人)}$$

$$(x, y) = (8, 10) \text{ のとき} \quad \text{団体の人数は } 20 \times 8 = 16 \times 10 = 160 \text{ (人)}$$

$$(x, y) = (12, 15) \text{ のとき} \quad \text{団体の人数は } 20 \times 12 = 16 \times 15 = 240 \text{ (人)}$$

$$\boxed{\text{答え: } 80 \text{ 人、} 160 \text{ 人、} 240 \text{ 人}}$$

(2) ある団体Bの全員が、1つの長いすに  $a$  人ずつ座ると、 $a$  人座っている長いすが

7脚と、10人座っている長いすが1脚できます。また、1つの長いすに  $b$  人ずつ座ると、 $b$  人座っている長いすが9脚と、2人座っている長いすが1脚できます。このとき、 $a, b$  の値と、団体Bの人数をそれぞれ求めなさい。

**解答**

問題文から、

$$7a + 10 = 9b + 2$$

が導かれ、この式から

$$7a + 8 = 9b \dots \textcircled{1}$$

が分かります。 $a, b$  は自然数なので、 $7a$  に8をたすと9の倍数になります。

このような  $a$  を考えると、

$$a = 4, 13, 22, 31 \dots$$

ただし、長いすに座れるのは 15 人までだから、 $a \leq 15$ 。 なので、

$$a = 4, 13$$

また、 $a$  人ずつ座ると 10 人座っている長いすが 1 つできるから、 $a > 10$

したがって  $a = 13$

これを①に代入して、

$$\underline{b = 11}$$

このとき、団体 B の人数は、

$$7a + 10 = 9b + 2 = 101 \text{ (人) である。}$$

答え: $a = 13, b = 11$ , 団体 B の人数 101 人
---------------------------------------