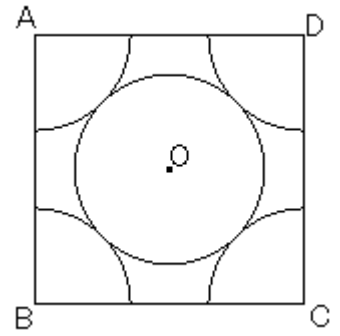


配点: ① 5点 ②(1)10点 ②)10点 ③(1)5点 ②)①10点 ②)10点

① 正方形ABCDの内部に円Oがあり、円Oと半径が同じで、中心角が 90° の扇形を、右図のように4つ描きました。正方形の面積が 200cm^2 であるとき、円Oの半径を求めなさい。



解答

まず、円Oの半径を $x\text{cm}$ とします。すると、対角線の長さは $4x\text{cm}$ と表すことができます。
 (正方形の面積)=(対角線) $^2 \div 2$ なので、これにそれぞれあてはめて、

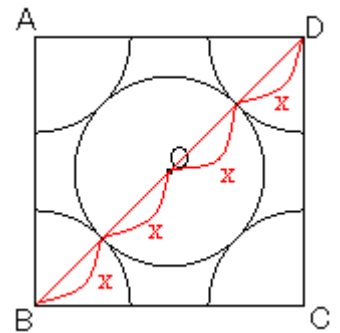
$$200 = (4x)^2 \div 2$$

$$200 = 8x^2$$

$$15 = x^2$$

$x > 0$ より、

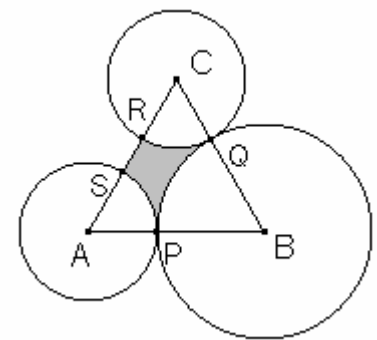
$$x = \sqrt{15}$$



答え: $\sqrt{15}\text{cm}$

② 1辺の長さが 4cm の正三角形ABCがあり、半径が $r\text{cm}$ ($4 - 2\sqrt{3} \leq r \leq 2$)で、

Aを中心とする円と線分ACとの交点をS、線分ABとの交点をPとします。次に、PBを半径とする円を、Bを中心として描き、その円と線分BCとの交点をQとします。次に、CQを半径とする円をCを中心として描き、その円と線分CAとの交点をRとします。線分RSと弧SPおよび弧PQ、弧QRで囲まれた部分(図の影をつけた部分)の面積をTとするとき、次の問に答えなさい。ただし円周率は π とします。



(1) $r = 1$ のときのTの値を求めなさい。

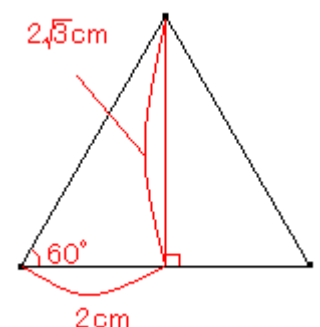
この解説で、たとえば「扇形A」とあった場合、それはAを中心とした円のうち、正三角形ABCの内部に含まれている部分を指します。

解答

(1) $r = 1$ のとき、 $PB = 4 - 1 = 3(\text{cm})$ 、 $BQ = PB = 3\text{cm}$ 、 $CQ = 4 - 3 = 1(\text{cm})$ 。

正三角形ABCの面積は、右図から、 $4 \times 2\sqrt{3} \div 2 = 4\sqrt{3}(\text{cm}^2)$ となるので、求める面積Tは、

(正三角形ABC)-(扇形A)-(扇形B)-(扇形C)



$$= 4\sqrt{3} - 1^2\pi \times \frac{1}{6} - 3^2\pi \times \frac{1}{6} - 1^2\pi \times \frac{1}{6}$$

$$= 4\sqrt{3} - (1+9+1)\pi \times \frac{1}{6} = 4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi$$

答え: $4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi$

(2) T の最大値とそのときの r を求めて、解答欄にあうように答えなさい。

解答

$4 - 2\sqrt{3} \leq r \leq 2$ なので、3つの扇形は、互いに重なったり、正三角形 ABC の外側にはみ出たりしません。
 なので、

$$T = (\text{正三角形 } ABC) - (\text{扇形 } A) - (\text{扇形 } B) - (\text{扇形 } C)$$

$$= 4\sqrt{3} - \left\{ \frac{1}{6}\pi r^2 + \frac{1}{6}\pi(4-r)^2 + \frac{1}{6}\pi r^2 \right\}$$

$$= 4\sqrt{3} - \left\{ \frac{1}{3}\pi r^2 + \frac{1}{6}(16 - 8r + r^2)\pi \right\}$$

$$= 4\sqrt{3} - \left(\frac{1}{3}\pi r^2 + \frac{8}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi r + \frac{1}{6}\pi r^2 \right)$$

$$= 4\sqrt{3} - \left(\frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{4}{3}\pi r + \frac{8}{3}\pi \right)$$

$$= 4\sqrt{3} - \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{8}{3} \right)\pi$$

$\pi > 0$ だから、 $\frac{1}{2}r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{8}{3}$ が最小のとき T が最大になります。

よって、 $\frac{1}{2}r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{8}{3}$ が最小になるときの r と T を求めればよいことになります。

$$y = \frac{1}{2}r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{8}{3} \quad (4 - 2\sqrt{3} \leq r \leq 2)$$

$$y = \frac{1}{2} \left(r^2 - \frac{8}{3}r \right) + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \left(r - \frac{4}{3} \right)^2 + \frac{16}{9}$$

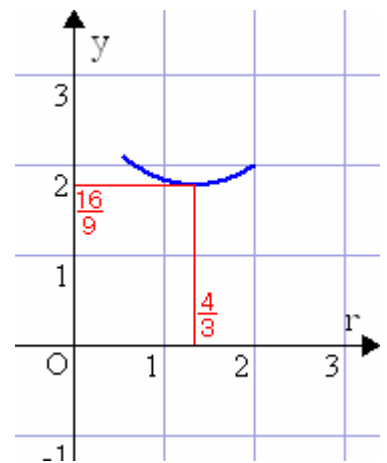
となるので、グラフは右のようになり、

$r = \frac{4}{3}$ のとき y は最小値 $\frac{16}{9}$ をとります。

したがって、求める最大値 T は、

$$4\sqrt{3} - \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{8}{3} \right)\pi \text{ に } r = \frac{4}{3} \text{ を代入して、}$$

$$T = 4\sqrt{3} - \frac{16}{9}\pi$$



答え: $r = \frac{4}{3}$ (のとき) $T = 4\sqrt{3} - \frac{16}{9}\pi$

③ (1) A君は読書を始めました。1日目に全体の20%を読み、2日目に残りの25%を読み、3日目に残りの3分の1を読んだところ、残ったページ数は、2日目に読んだページ数より77ページ多かったそうです。この本は全部で何ページありますか。

解答 (1)この本のページ数を x ページとする。

1日目に全体の20%を読んだから、1日目に読んで残ったページ数は、 $x - \frac{20}{100}x = \frac{4}{5}x$ (ページ)

2日目は残りの25%を読んだから、

$$2日目に読んだページ数は、\frac{4}{5}x \times \frac{25}{100} = \frac{1}{5}x \text{ (ページ)} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2日目に読んで残ったページ数は、\frac{4}{5}x - \frac{1}{5}x = \frac{3}{5}x \text{ (ページ)}$$

3日目に残りの $\frac{1}{3}$ を読んだから、

$$3日目に読んで残ったページ数は、\frac{3}{5}x \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}x \text{ (ページ)} \dots \textcircled{2}$$

問題から、②は①より77ページ多いので、

$$\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}x = 77 \text{ である。これをといて、}$$

$$\frac{1}{5}x = 77$$

$$x = 385$$

答え:385 ページ

(2) Bさんも読書を始めました。1日目に全体の30%を読み、2日目に残りの35%を読み、3日目に何ページか読んだところ、残ったページ数は2日目に読んだページ数と同じでした。このとき、

① 1日目に読んだページ数と2日目に読んだページ数と3日目に読んだページ数の比を求めなさい。

解答

(2) この本のページ数をこの本のページ数を x ページとします。

① 1日目に全体の30%を読んだから、

$$1日目に読んだページ数は\frac{3}{10}x \text{ ページ} \dots \text{(A)}、1日目に読んで残ったページ数は、\frac{7}{10}x \text{ ページ。}$$

2日目に残りの35%を読んだから、

$$2日目に読んだページ数は\frac{7}{10}x \times \frac{35}{100} = \frac{49}{200}x \text{ (ページ)} \dots \text{(B)、}$$

$$2日目に読んで残ったページ数は、\frac{7}{10}x - \frac{49}{200}x = \frac{91}{200}x$$

3日目に何ページか読んだ後、残ったページ数は2日目に読んだページ数と同じ、すなわち $\frac{49}{200}x$ ページだったから、

$$3日目に読んだページ数は\frac{91}{200}x - \frac{49}{200}x = \frac{42}{200}x = \frac{21}{100} \dots \text{(C)}$$

(A)~(C)より、求める比は、

$$\frac{3}{10}x : \frac{49}{200}x : \frac{21}{100}x = 60 : 49 : 42$$

答え 60:49:42

② この本は少なくとも何ページありますか。

解答

② 1日目に読んだページ数と2日目に読んだページ数と3日目に読んだページ数と3日目に読んで残ったページ数が、すべて整数でなくてはなりません。つまり、

$$\frac{3}{10}x \quad \frac{49}{200}x \quad \frac{21}{100}x \quad \text{がすべて整数となるような } x \text{ で、最小のものを求めればよいことになります。}$$

その条件を満たす x は、それぞれの分母 10,200,100 の最小公倍数となるので、

$$x = 200$$

答え:200 ページ